



TITLE:

Crystal Bases of $U_q(\mathfrak{g})$ (WORKSHOP ON ALGEBRAIC GROUPS AND RELATED TOPICS)

AUTHOR(S):

相原, 正樹

CITATION:

相原, 正樹. Crystal Bases of $U_q(\mathfrak{g})$ (WORKSHOP ON ALGEBRAIC GROUPS AND RELATED TOPICS). 数理解析研究所講究録 1990, 737: 42-49

ISSUE DATE:

1990-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102048>

RIGHT:

Crystal Bases of $U_q(\mathfrak{g})$

京大数研 相原正樹

1. 統計力学における可解模型構成のために, Q -analogue of universal enveloping algebra が 神保. Drinfeld により独立に導入されてから既に7年たつ。 $U_q(\mathfrak{g})$ は パラメーター q を含み, $q=1$ の時 universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ に一致する。可解模型においては, q は 温度の parameter であり, $q=0$ を 温度絶対温度零度にあたる。そこで $q=0$ においては, 現象が単純化されると期待される。

2. $\mathfrak{p} = \bigoplus_i \mathbb{Z} \alpha_i$ $\mathfrak{t}^* = \bigoplus_i \mathbb{Q} \alpha_i$, $(,)$ と \mathfrak{t}^* 上の 内積を

$$\textcircled{1} (\alpha_i, \alpha_i) \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$\textcircled{2} \left(\frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \right)_{i,j} \quad \text{一般 Cartan matrix}$$

と対応するものとする。この時, $U_q(\mathfrak{g})$ は

t_i, e_i, f_i, t_i^{-1} で生成される algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}$

$$t_i e_j t_i^{-1} = q^{2(\alpha_i, \alpha_j)} e_j$$

$$t_i f_j t_i^{-1} = q^{-2(\alpha_i, \alpha_j)} f_j$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$$

$$\sum (-)^n e_i^{(n)} e_j e_i^{(b-n)} = \sum (-)^n f_i^{(n)} f_j f_i^{(b-n)} = 0$$

$$\text{for } i \neq j, \quad b = 1 - \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

と基本関係式とするとよい。ただし

$$\text{但し } q_i = q^{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

$$e_i^{(n)} = e_i^n / [n]_i! \quad f_i^{(n)} = f_i^n / [n]_i!$$

$$[n]_i = \frac{q_i^n - q_i^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}, \quad [n]_i! = \prod_{k=1}^n [k]_i$$

Comultiplication $\Delta: U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$

$$\in \Delta(t_i) = t_i \otimes t_i$$

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes e_i$$

$$\Delta(f_i) = f_i \otimes 1 + t_i \otimes f_i$$

とす。

3. $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ 上の $U_q(\mathfrak{g})$ -module M に対して

$$M_\lambda = \{ u \in M ; t_i u = q^{2\langle \alpha_i, \lambda \rangle} u \}$$

とおく。 $U_q(\mathfrak{g})$ -module M を integrable
とす。

$$a) \quad M = \bigoplus M_\lambda$$

$$b) \quad \dim M_\lambda < \infty$$

c) $\forall i$ に対して, M は (e_i, f_i) で生成
される algebra の有限次元表現の
和

とす。

$$\text{今 } E = \{ \lambda \in \mathfrak{t}^* ; \langle h_i, \lambda \rangle \stackrel{\text{def}}{=} 2\langle \alpha_i, \lambda \rangle / (\alpha_i, \alpha_i) \in \mathbb{Z} \}$$

とおくと $M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda$ とおける

$$又 \quad M = \bigoplus_{\lambda \in P} f_i^{(k)} (\ker e_i \cap M_\lambda)$$

$\langle h_i, \lambda \rangle \geq k \geq 0$

とおける $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$

$$\begin{cases} \tilde{e}_i(f_i^{(k)} u) = f_i^{(k-1)} u \\ \tilde{f}_i(f_i^{(k)} u) = f_i^{(k+1)} u \end{cases}$$

により $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i \in \text{End}(M)$ と define する

$$A = \{ f \in \mathbb{Q}(g); f \neq 0 \text{ regular} \}$$

定義 (L, B) を integrable $U_q(\mathfrak{g})$ -module M の crystal base とは 次の条件を満たすこと。

1) $L \subset M$ は free A -module と $\mathbb{Q}(g) \otimes_A L \cong M$

2) $B \subset L/gL$ は base

3) $\tilde{e}_i L \subset L, \tilde{f}_i L \subset L, \tilde{e}_i B \subset B \cup \{0\},$
 $\tilde{f}_i B \subset B \cup \{0\}$

4) $L = \bigoplus L_\lambda, B = \sqcup B_\lambda$ 。ここに

$$L_\lambda = L \cap M_\lambda; \quad B_\lambda = B \cap (L_\lambda / \mathfrak{g}L_\lambda)$$

$$s) \quad b, b' \in B \text{ の間, } b = \tilde{f}_i b \Leftrightarrow b = \tilde{e}_i b'.$$

$$\text{すなわち } \lambda \in P_+ = \{ \lambda \in P; \langle h_i, \lambda \rangle \geq 0 \} \quad \text{の}$$

間, $V(\lambda) \ni \lambda \in \text{highest weight}$ とす。

キヤク表現とす。よって

$$V(\lambda) = U_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) u_\lambda$$

ここで u_λ の基底関係式は

$$t_i u_\lambda = g^{2\langle \alpha_i, \lambda \rangle} u_\lambda$$

$$e_i u_\lambda = 0$$

$$f_i^{1+\langle h_i, \lambda \rangle} u_\lambda = 0.$$

$L(\lambda) \ni u_\lambda \in \mathfrak{g}$ を \tilde{f}_i で不変な最小の

A -module, $B = \{ \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_k} u_\lambda \bmod \mathfrak{g}L \} \setminus \{0\}$
 $\subset L/\mathfrak{g}L(\lambda)$ とおく。

定理 $(L(\lambda), B(\lambda))$ は $V(\lambda)$ の crystal base.

定理 $M \cong \bigoplus_j V(\lambda_j)$ と同型な $U_q(\mathfrak{g})$ -module,
 $(L, B) \in \mathcal{Z}$ の crystal base とすれば
 同型 $M \cong \bigoplus_j V(\lambda_j)$ の存在して \mathcal{Z} かつ
 $(L, B) \cong \bigoplus (L(\lambda_j), B(\lambda_j))$

定理 $M_1, M_2 \in \text{integrable } U_q(\mathfrak{g})\text{-modules}$,
 $(L_j, B_j) \in M_j$ の crystal base ($j=1, 2$) と
 するとき, $L = L_1 \otimes L_2$ $B = B_1 \otimes B_2 \subset L/qL$
 とおくと (L, B) は $M_1 \otimes M_2$ の
 crystal base である。

$u_j \in B_j$ ($j=1, 2$) とすれば

$$\widehat{f}_i(u_1 \otimes u_2) = \begin{cases} \widehat{f}_i u_1 \otimes u_2 & \text{if } \exists n \geq 1 \text{ s.t.} \\ & \widehat{f}_i^n u_1 \neq 0, \widehat{e}_i^n u_2 = 0 \\ u_1 \otimes \widehat{f}_i u_2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\widehat{e}_i(u_1 \otimes u_2) = \begin{cases} u_1 \otimes \widehat{e}_i u_2 & \text{if } \exists n \geq 1 \text{ s.t. } \widehat{e}_i^n u_2 \neq 0 \text{ and } \\ & \widehat{f}_i^n u_1 = 0 \\ \widehat{e}_i u_1 \otimes u_2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

7. Crystal Graph $(L, B) \in \text{crystal}$

base とする時, crystal graph とは

$\tilde{U} \in \text{color}$ とする 色つき oriented graph

で B をその TX 系 とするもの

$$\textcircled{u} \xrightarrow{i} \textcircled{v} \Leftrightarrow v = \tilde{f}_i u$$

その時, M の分解 (モジュール分解)

IF B の分解 と対応する, これに
より, integrable $U_q(\mathfrak{g})$ -modules

$(\cong \oplus V(\lambda_i))$ のつくる tensor Category

は crystal graph により 完全

に記述される。

5) Global base

$$U^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{g}) \ni e_i^{(n)}, f_i^{(n)} \quad \text{is a PBW basis}$$

$U(\mathfrak{g})$ is a $\mathbb{Z}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{-1}]$ subalgebra,

$$V^{\mathbb{Z}}(\lambda) = U^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{g}) u_{\lambda} \quad \text{is a basis}$$

is the

$$V^{\mathbb{Z}}(\lambda) \cap L(\lambda) \cap L(\lambda)^{-} \xrightarrow{\sim} L(\lambda) / \mathfrak{g}L(\lambda)$$

but \sim is $V(\lambda)$ is an automorphism \sim

$$\overline{u_{\lambda}} = u_{\lambda} \quad , \quad \overline{f_i u} = f_i \bar{u}$$

$$\overline{\mathfrak{g}u} = \mathfrak{g}^{-1} \bar{v}$$

is a basis.

$$b \in L(\lambda) / \mathfrak{g}L(\lambda) \text{ is a basis} \quad P(b) \in V^{\mathbb{Z}}(\lambda) \cap L(\lambda)$$

$$\cap L(\lambda)^{-} \text{ is a basis} \quad \text{is a basis}$$

$$\text{Thm} \quad V^{\mathbb{Z}}(\lambda) = \bigoplus_{b \in B(\lambda)} \mathbb{Z}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{-1}] P(b)$$

$$\bigcap_{\mathfrak{g}} V^{\mathbb{Z}}(\lambda) \cap f_i^{(n)} V(\lambda) = \bigoplus_{b \in f_i^{(n)} B(\lambda) \setminus \{0\}} \mathbb{Z}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{-1}] P(b).$$